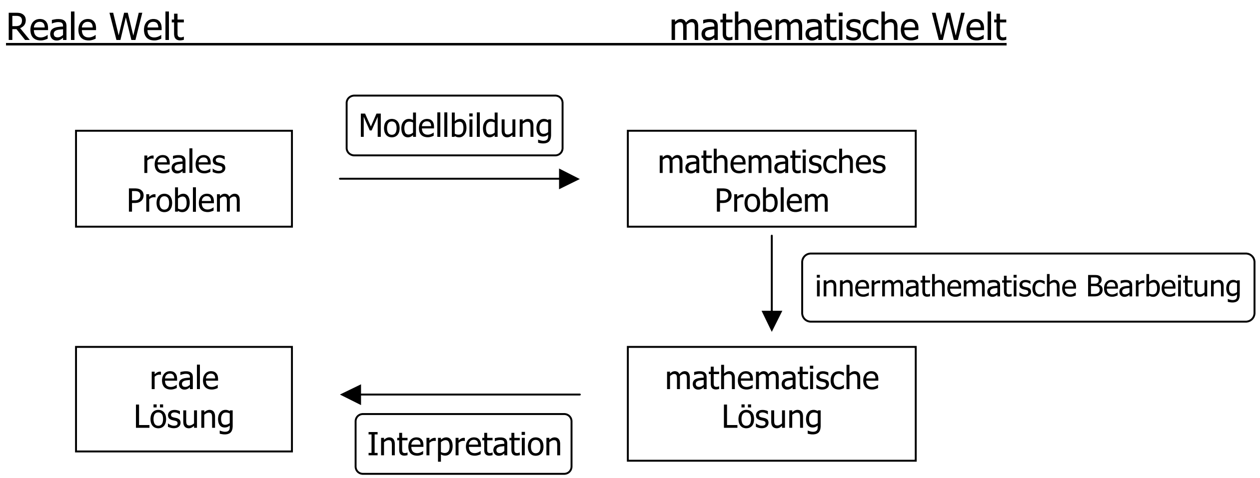
CURRCULUM FÜR DIE SEKUNDARSTUFE II

Kompetenzorientierung

Kernziel: Fähigkeit zur Anwendung mathematischer Modelle und Methoden zur Lösung realer Problemstellungen und die nachfolgende Interpretation der mathematisch erzielten Ergebnisse im realen Problemkontext.



Die Kernkompetenzen beziehen sich auf folgende Bereiche

Analysis:	**Geometrie:**	**Matrizen:**	**Stochastik**
• Analyse und Bewertung von Veränderungen • Bestimmung „optimaler" Werte • Messen von globalen Veränderungen • Bestimmen mittlerer Änderungen	• Berechnung metrischer Größen im Kontext räumlicher Gebilde • Abbildungen in Raum und Eben	• Populationsentwicklungen, Austauschprozesse, mehrstufige Produktion • Beschreibung geometrischer Abbildungen	• beschreibende Statistik • Wahrscheinlichkeiten a posteriori und a priori • Urnenmodelle

Zum Erreichen obiger Ziele bedarf es den Bereichen folgende innermathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten

Analysis: Techniken zur Untersuchung von Funktionen	**Geometrie:** Techniken zur Untersuchung von Geraden, Ebenen und Körpern im $\mathbf{R}^3$	**Matrizen:** Techniken zur Untersuchung von Vererbungs- und Verflechtungsprozessen sowie Abbildungsfunktionen	**Stochastik** Techniken zur Aufbereitung von Datenmengen in der beschreibenden Statistik und Untersuchung der Abhängigkeit von Zufallsgrößen
• Differentialrechnung ○ Ableitung, Ableitungsregeln ○ Bestimmung von Nullstellen, Extrempunkten und Wendepunkten ○ Symmetrieverhalten ○ Grenzverhalten ○ Steigungsberechnungen ○ Tangenten • Integralrechnung ○ Integrationsregeln ○ Bestimmung von Flächeninhalten und Volumina ○ Untersuchungen von Wirkungen ○ Berechnung von Mittelwerten	• Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene im Raum • Untersuchung von Lagebeziehungen • Berechnung von ○ Längen ○ Abständen ○ Winkeln ○ Flächeninhalten ○ Volumina	• Matrixoperationen ○ Addition und Multiplikation ○ Potenzieren ○ Bildung der Inversen ○ Berechnung von Determinanten ○ Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren • Lösen linearer Gleichungssysteme • Anwendung des Matrixkalküls zur Beschreibung von Abbildungen in der Ebene	• Berechnung von Kenngrößen • Darstellungen ○ Boxplot ○ Histogramm ○ Regressionsgerade • Korrelationsberechnungen • bedingten Wahrscheinlichkeiten darstellen und berechnen ○ Ereignisbaum ○ Vierfeldertafel • Untersuchungen von binomialverteilten Größen

Beispiel für Modellbildung und innermathematische Lösung in der Analysis

Aufgabenstellung	Vorgaben und Mathematisierung	
Es soll der Flug einer Silvesterrakete untersucht werden. Mögliche Arbeitsaufträge: a) Berechne den Zeitpunkt, in dem die Rakete die höchste Geschwindigkeit erreicht. b) Ermittle die maximale Flughöhe und die Zeit, in der diese erreicht wird. c) Berechne die Zeit, nach der die Rakete wieder am Boden aufschlägt und die Geschwindigkeit beim Aufprall. Setzen Sie voraus, dass der Aufprallpunkt das gleiche Höhenniveau wie der Abschusspunkt hat. d) Die Rakete schlägt bereits nach 8s wieder auf. Bestimme die Höhe des Aufprallpunktes bezüglich des Abschussniveaus.	Vorgaben: Bekannt ist, dass die Rakete, die senkrecht nach oben abgeschossen wird, nach 2 Sekunden eine Geschwindigkeit von 48m/s hat. Der höchste Punkt wird nach 4 Sekunden erreicht, wobei v'(4) = 0 sein soll. Als Modell zur Beschreibung der Fluggeschwindigkeit bis zum höchsten Punkt soll eine kubische Funktion benutzt werden; der freie Fall im Anschluss (t > 4) wird beschrieben durch die Funktion g(t) = -10(t-4) Mathematisierung: Die Bedingungen v(0)=0; v(2) = 48; v(4) = 0 und v'(4)=0 führen zu $v(t) = 6t(t-4)^2$ für $0 \le t \le 4$	a) $v'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$ Nach etwa 1.33 Sekunden wird die höchste Geschwindigkeit erreicht. b) $\int_0^4 v(t)\,dt = [V(t)]_0^4 = 128$ Die maximale Höhe beträgt 128 m. c) $\int_4^b g(t)\,dt = [G(t)]_4^b = -128 \Rightarrow b \approx 9{,}06;\ g(9{,}06) = -50{,}6$ Die Rakete schlägt nach 9,06s mit einer Geschwindigkeit von -50,6m/s wieder auf. d) $\int_4^8 g(t)\,dt = [G(t)]_4^8 = -80 \Rightarrow h = 128 - 80 = 48$ Die Rakete bleibt 48m über dem Abschussniveau liegen.

Jahrgang	Inhalte	Methoden- und Urteilskompetenzen
EPh (Einführungs-phase)	**1. Lineare Funktion** a) Punktsteigungsform, skizzieren, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen b) Geradenschnitt, Parallelität, Orthogonalität, Gerade durch 2 Punkte c) Entfernung von 2 Punkten, Mitte zwischen 2 Punkten, Schwerpunkt d) Höhe im Dreieck, Dreiecksfläche , Dreiecksgeometrie als Anwendung **2. Quadratische Funktion** a) Normalform, Scheitelpunktsform, Nullstellen, b) Parabel durch 3 Punkte (LGS) c) Tangente im Punkt P (Gleichung und Konstruktion) d) Anwendungen (Flugbahnen, Brücken Brennpunkt, …) **3. Weitere Funktionstypen** a) Potenzfunktionen, Hyperbeln b) ganzrationale Funktionen c) Winkelfunktionen d) Exponentialfunktionen e) Überlegungen zu Symmetrie, Asymptoten, Randverhalten, Verschiebungen	Der Abschnitt Koordinatengeometrie und Funktionen dient der Festigung, der Vertiefung und der Ergänzung der in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen. Die mathematischen Leitideen Messen, Strukturieren in der Ebene und im Raum, funktionaler Zusammenhang und mathematisches Modellieren bestimmen dieses Kapitel. Die Lerninhalte werden in Anwendungszusammenhängen unterrichtet.
	4. Beschreibende Statistik a) Datendarstellung, Klassifizierung b) Mittelwert und Standardabweichung, Standardisierung c) Regression und Korrelation	Durch die mathematische Beschreibung von zufallsabhängigen Vorgängen bei adäquater Verwendung zentraler Begriffe und Methoden der Statistik und Stochastik sowie durch eine kritische Bewertung der Ergebnisse werden vielfältige Kompetenzen vermittelt.
	5. Einführung in die Differentialrechnung a) Änderungsrate und Differenzenquotient b) Ableitung an einer Stelle, Ableitungsfunktion c) Ableitungsregeln: Summenregel, Faktorregel, Potenzregel d) Tangente und Normale, Anwendungen e) grafisches Differenzieren (z. B. sin(x) ..)	Ziel dieses Unterrichtsabschnitts ist die Entwicklung einer anschaulichen Vorstellung des Differenzialquotienten. Die mathematischen Zusammenhänge sind an konkreten Beispielen und in vielfältigen Sachbezügen zu entwickeln und anzuwenden.
	6. Untersuchung ganzrationaler Funktionen a) Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Randverhalten b) Kurvendiskussion (Symmetrie, Randverhalten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Skizze) c) Anwendungen in **Sachzusammenhängen**	Die zu behandelnden Eigenschaften von Funktionen erhalten in Anwendungskontexten zu interpretierende Bedeutungen. Unreflektierte und schematische Funktionsuntersuchungen werden vermieden. Ein nur rezeptives Verwenden von Kriterien steht nicht im Vordergrund.

Jahrgang	Inhalte	Methoden- und Urteilskompetenzen
Q1 LK (Qualifikations- phase 1)	**1) Wiederholung von Inhalten der EPh – Fortführung Analysis** a) Kurvenuntersuchung in Anwendungen b) Koeffizientenbestimmung in Anwendungen c) Produkt- , Quotienten- , Kettenregel d) Extremalprobleme **2) Integralrechnung** a) Unter- und Obersummen, U_n, O_n , Grenzwertbildung b) Flächeninhaltsfunktion, Stammfunktionen, Hauptsatz – c) Berechung von Flächen, Anwendungen, die sich nicht auf Flächen beziehen d) Analyse von Wirkungen e) Mittelwerte , ev. Rotationskörperberechnung **3) Exponentialfunktionen** a) Herleitung der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und ihrer Ableitung b) Untersuchung von e-Funktionen c) Anwendungen (s. Abituraufgaben) **4) Logarithmusfunktionen** a) Ableitung der Umkehrfunktion b) Untersuchung von Logarithmusfunktionen c) Anwendungen (s. Abituraufgaben) **5) Weiterführung der Integralrechnung** a) Partielle Integration und Substitutionsregel (logarithmische Integration) b) Anwendung bei Exponential- und Logarithmusfunktionen **6) Gebrochenrationale Funktionen** **7) Einführung in die vektorielle Geometrie** a) Darstellung von Objekten im 3-dim. Koordinatensystem b) Verschiebungen, Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation, Rechengesetze, c) Linearkombinationen, lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension **8) Darstellung von Geraden und Ebenen im R^3** a) Geradendarstellung, Punktprobe, Lagebeziehungen, b) Ebene in Parameter- und Koordinatenform (bzw. Normalenform) c) Lageprobleme im Zusammenhang mit Ebenen d) Länge, Orthogonalität, Winkelmessung, Abstandsprobleme e) Dreieckfläche und Spatvolumen, Vektor- und Spatprodukt f) Zusammenhängende Anwendungen (s. Abituraufgaben)	Die Grundbegriffe der Differentialrechnung entfalten sich bei der Arbeit mit konkreten Anwendungssituationen, in denen das Erfassen und Beschreiben von Veränderungen im Mittelpunkt stehen. Als Untersuchungsgegenstände eignen sich numerisch gegebene diskrete Prozesse (z. B. Messreihen eines Beschleunigungsvorganges), grafisch repräsentierte, qualitative Prozesse (z. B. Wasserstand in einem Staubecken) oder auch symbolisch erfasste Prozesse (z. B. exponentielles Wachstum). Bei der Arbeit mit Funktionen als konkrete Modelle für reale Vorgänge haben die Schülerinnen und Schüler besondere Gelegenheit zu argumentieren („Warum ist der Zuwachs hier am größten"?) und zu modellieren („Wie bewegt sich ein Läufer?") und Probleme zu lösen („Wie müsste der Graph für die Geschwindigkeit aussehen?"). Im Leistungskurs wird zusätzlich eine strengere Absicherung mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Regeln angestrebt, indem Beispiele und Gegenbeispiele für verschiedene Phänomene (z. B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit) untersucht und systematisiert werden. Außerdem werden hier auch verstärkt Zusammenhänge aus rein innermathematischer Perspektive untersucht. Die Integration konkreter Funktionen und allgemeiner Funktionsklassen wird in enger Verknüpfung mit den Ableitungsregeln erarbeitet und bietet Gelegenheiten zum Problemlösen. Verschiedene andere Ausschöpfungsprozesse vertiefen das Verständnis für die Grundidee des Integrierens. Im Leistungskursfach werden die entwickelten Begriffe zugleich theoretisch systematisiert: Die systematische Untersuchung möglicher Lagebeziehungen zwischen linearen Objekten führt auf die Entwicklung von Verfahren der linearen Algebra. Aus diesen konkreten Anwendungen können allgemeine Begriffe wie Vektorraum, lineare Unabhängigkeit, Skalarprodukt entwickelt und auch auf andere nicht-geometrische Situationen übertragen werden. Diese Verallgemeinerungen verlangen vor allem mathematisches Argumentieren.

Jahrgang	Inhalte	Methoden- und Urteilskompetenzen
Q2 LK (Qualifikations-phase 2)	**1) Einführung in Matrizenoperationen** a) Addition und skalare Multiplikation; Matrix* Vektor; Matrix* Matrix Eigenschaften der Matrixoperationen b) Determinante; Zusammenhang zu linearer Abhängigkeit; Lösbarkeit von LGS c) mehrstufige Produktionsprozesse und Matrixmultiplikation (Eigenschaften)	
	2) Übergangsmatrizen bei Austauschprozessen a) Kreisdiagramm und Übergangsmatrix b) Bestimmung von $A^n \cdot \vec{x}$ in Anwendungen c) Stationäre Verteilungen, Fixvektor, inverse Matrix d) Anwendungsaufgaben (s. Abituraufgaben) **3) Übergangsmatrizen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen** a) Entwicklungsmodelle (zyklische Entwicklung, exponentielle Zunahme, Aussterben) b) Steuerung von Entwicklungen durch einzelne Parameter c) Anwendungsaufgaben (s. Abituraufgaben)	Übergangsmatrizen werden zur Modellierung von Wirtschaftsprozessen und Simulation biologischer Fragestellungen eingesetzt. Die Betrachtung von Grenzverteilungen und stationären Verteilungen stellt eine Verbindung zur Stochastik her. Hierbei ergibt sich automatisch die Notwendigkeit der fortgesetzten Matrizenmultiplikation und Invertierung.
	4) Einführung von Abbildungsmatrizen a) Übungen zur vektoriellen Geometrie im R^2 b) Verschiebung, zentrische Streckung, Spiegelung, Drehung, Parallelprojektion c) Darstellung der linearen und affinen Abbildungen durch Matrizen, f(x)=A x + b **5) Beschreibung spezieller Abbildungen** a) Spiegelung an einer Gerade g, Drehung um x Grad um einen Punkt P, zentrische Streckung vom Punkt S aus mit dem Faktor k , Scherungen, allgemeine Parallelprojektion b) Bedeutung der Determinante einer Abbildungsmatrix, inverse Matrix	Die Darstellung von Abbildungen durch eine Matrix und die Verknüpfung von Abbildungen durch die Matrizenmultiplikation gibt Möglichkeiten, strukturmathematische Aspekte zu behandeln.
	6) Eigenwertprobleme a) Fixpunkte und Fixgeraden, Fixpunktgerade b) Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren c) Anwendungen von Eigenwertproblemen	Die Eigenwerte von Matrizen und ihre geometrische Bedeutung als Achsenstreckungen liefern eine Verbindung zwischen algebraischen und geometrischen Prozessen.
	7) Abbildungen im R^3 Parallelprojektion, Spiegelung an einer Ursprungsebene, Drehung an den Koordinatenachsen **8) Orientierungswissen Stochastik** **9) Q2-II: Abiturvorbereitung** a) Wiederholung und Schließen von Lücken b) Abiturvorbereitung mit Aufgaben aus dem Zentralabitur	

Jahrgang	Inhalte	Methoden- und Urteilskompetenzen
Q1 GK (Qualifikations-phase 1)	**1) Wiederholung von Inhalten der EPh – Fortführung Analysis** a) Kurvenuntersuchung in Anwendungen b) Koeffizientenbestimmung in Anwendungen c) Produkt- und Kettenregel d) Extremalprobleme **2) Integralrechnung** a) Unter- und Obersummen, U_n, O_n , Grenzwertbildung b) Flächeninhaltsfunktion, Stammfunktionen, Hauptsatz – c) Berechung von Flächen, Anwendungen, die sich nicht auf Flächen beziehen d) Analyse von Wirkungen e) Mittelwerte , ev. Rotationskörperberechnung **3) Exponentialfunktionen** a) Herleitung der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und ihrer Ableitung b) Untersuchung von e-Funktionen c) Anwendungen (s. Abituraufgaben) **4) Weiterführung der Integralrechnung** a) Partielle Integration b) Anwendung bei Exponentialfunktionen **5) Einführung in die vektorielle Geometrie** a) Darstellung von Objekten im 3-dim. Koordinatensystem b) Verschiebungen, Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation, Rechengesetze, c) Linearkombinationen, Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension **6) Darstellung von Geraden und Ebenen im R^3** a) Geradendarstellung, Punktprobe, Lagebeziehungen, b) Ebene in Parameter- und Koordinatenform (bzw. Normalenform) c) Lageprobleme im Zusammenhang mit Ebenen d) Länge, Orthogonalität, Winkelmessung, Abstandsprobleme e) Fläche des Dreiecks und Volumen des Spats, Vektorprodukt, f) Spatprodukt Zusammenhängende Anwendungen (s. Abituraufgaben)	Die Grundbegriffe der Differentialrechnung entfalten sich bei der Arbeit mit konkreten Anwendungssituationen, in denen das Erfassen und Beschreiben von Veränderungen im Mittelpunkt stehen. Als Untersuchungsgegenstände eignen sich numerisch gegebene diskrete Prozesse (z. B. Messreihen eines Beschleunigungsvorganges), grafisch repräsentierte, qualitative Prozesse (z. B. Wasserstand in einem Staubecken) oder auch symbolisch erfasste Prozesse (z. B. exponentielles Wachstum). Bei der Arbeit mit Funktionen als konkrete Modelle für reale Vorgänge haben die Schülerinnen und Schüler besondere Gelegenheit zu argumentieren („Warum ist der Zuwachs hier am größten"?) und zu modellieren („Wie bewegt sich ein Läufer?") und Probleme zu lösen („Wie müsste der Graph für die Geschwindigkeit aussehen?"). Diese Vielfalt an Situationen und sinnstiftenden Kontexten kann nur dann genutzt werden, wenn man sich nicht allein auf die algebraisch berechenbaren Funktionen als Modelle beschränkt Im Grundkurs bleibt die Orientierung an Realsituationen durchgehendes Prinzip. Die Methoden der Infinitesimalrechnung werden weiterentwickelt, um z. B. Extremalprobleme in einfachen Anwendungen lösen zu können. Argumentationen werden hier immer auch inhaltlich geführt. Im Grundkurs werden die Integration und Differenziation in vielfältigen einfachen Anwendungskontexten vertieft. Neue Funktionsklassen werden nur hinzugezogen, sofern sie als Modelle für diese Kontexte dienen. Im Wechsel zwischen geometrischer Darstellung und analytischer Bearbeitung wird das Wissen an weiteren realistischen oder elementargeometrischen Problemen vertieft. Dabei werden auch Winkel- und Flächenberechnungen in analytischer Schreibweise erarbeitet. Hierbei gibt es vielfältige Anlässe für problemlösendes Arbeiten.

Jahrgang	Inhalte	Methoden- und Urteilskompetenzen
Q2 GK (Qualifikations-phase 2)	**1) Exponentialfunktionen** a) Produkt- , Quotienten- , Kettenregel b) Herleitung der natürlichen Exponentialfunktion f(x) = e^x und deren Ableitung c) Untersuchung von e-Funktionen der Form , Anwendungen (s. Abituraufgaben) **<u>Alternative I</u>** **2) Einführung in Matrizenoperationen** a) Addition und skalare Multiplikation; Matrix* Vektor; Matrix* Matrix b) mehrstufige Produktionsprozesse und Matrixmultiplikation (Anwendungen) **3) Übergangsmatrizen bei Austauschprozessen** a) Kreisdiagramm und Übergangsmatrix b) Bestimmung von $A^n \cdot \vec{x}$ in Anwendungen c) Stationäre Verteilungen, Fixvektor, inverse Matrix d) Anwendungsaufgaben (s. Abituraufgaben) **4) Übergangsmatrizen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen** a) Entwicklungsmodelle (zyklische Entwicklung, exponentielle Zunahme, Aussterben) b) Steuerung von Entwicklungen durch einzelne Parameter c) Anwendungsaufgaben (s. Abituraufgaben) **<u>Alternative II</u>** **5) Einführung von Abbildungsmatrizen** a) Verschiebung, zentrische Streckung, Spiegelung, Drehung, Parallelprojektion im R^2 b) Affine Abbildungen f(x) = A x + b (lineare Abb. + Verschiebung) **6) Beschreibung spezieller Abbildungen** a) Spiegelung an einer Gerade g, Drehung um x Grad um einen Punkt P Zentrische Streckung vom Punkt S aus mit dem Faktor k , Scherungen allgemeine Parallelprojektion auf beliebige Gerade b) Bedeutung der Determinante einer Abbildungsmatrix, inverse Matrix **7) Eigenwertprobleme** a) Fixpunkte und Fixgeraden, Fixpunktgerade b) Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren und deren Anwendung **8) Orientierungswissen Stochastik** **9) 13.2: Abiturvorbereitung** a) Wiederholung und Schließen von Lücken b) Abiturvorbereitung mit Aufgaben aus dem Zentralabitur	Das Erweitern der rechnerisch behandelbaren Funktionsklassen und das Entwickeln von Ableitungsregeln haben immer zum Ziel, weitere Modelle (z. B. exponentielles Wachstum, abschnittweise definierte Funktionen) bearbeiten zu können. Siehe LK Siehe LK